hMercredi 06 mars 2013 *Durée :3 heures*	**Devoir de Synthèse n°02**	
Mr Ouled Belgacem Farouk *Lycée Maknassi **4tech 2*	**Mr Yahyaoui Ridha** **Mme Latifa Guith** *Lycée Sahline **4tech 1 ,2 et3*	**Mr Chaouch Faouzi** **Mr Chortani** *Lycée Bembla ** 4 Tech 1 + 3*

Exercice1 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

En justifiant votre réponse

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et *B*(−6 ; 2 ; 1).

Le plan *P* admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 5$.

1)La sphère de centre *B* et de rayon 1 :

a. coupe le plan *P* suivant un cercle ; b. est tangente au plan *P* ; c. ne coupe pas le plan *P.*

2) On considère la droite *D* de l'espace passant par *A* et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et la droite *D'*

d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \quad , t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$. Les droites *D* et *D'* sont :

a. parallèles ; b. sécantes c. non coplanaires.

3) L'ensemble des points *M* de l'espace équidistants des points *A* et *B* est :

a. la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} - t \\ y = \dfrac{3}{2} - 7t \quad , t\in\mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}$,

b. le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$,

c. le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A (6, 0, 0) , B (0, 6, 0), C (0, 0, 6) et D (– 2, −2, – 2).

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ **(1point)**

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est :$x + y + z - 6 = 0$**(0.5point)**

c) Montrer que ABCD est un tétraèdre et calculer sont volume**(0.5 +0.5point)**

3)a) Montrer que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P. **(0.5point)**

b) Donner une équation paramétrique de la droite (OD) **(0.5point)**

c) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan P. Vérifier que H a pour coordonnées (2, 2,2) **(0.5point)**

4) Soit S la sphère de centre D et passante par A

a)Calculer le rayon de S **(0.5point)**

b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC **(0.5point)**

c)Montrer que H est le centre de $\mathscr{C}$. **(0.5point)**

Exercice 3(6 points)

I)Soit g la fonction définie sur ℝ , par :$g(x) = 1 - 2x + \mathrm{e}^{2x}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	g (0)	$\nearrow$	$+\infty$

1) Calculer g (0) **(0.25point)**

2) En déduire le signe de g**(0.5point)**

II)On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$

1)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$(\mathbf{0.25 + 0.5point})$

2)a) Montrer pour tout x de ℝ , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$ $(\mathbf{0.5point})$

b) Dresser le tableau des variations de f. **(0.5point)**

3)Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. **(0.5point)**

On note $\mathscr{C}'$ la courbe de la fonction réciproque de f

4) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$. **(0.5point)**

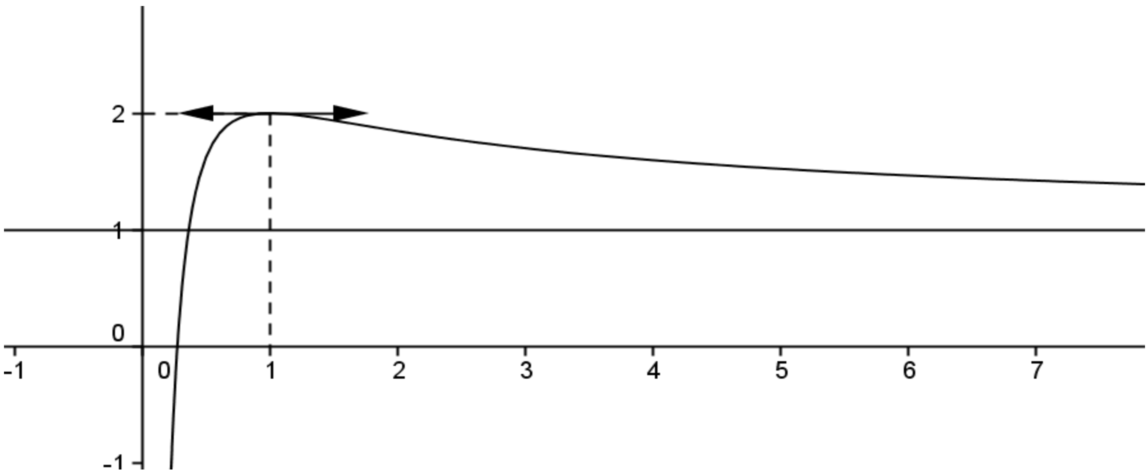
b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D. **(0.5point)**

c)Montrer que $\mathscr{C}$admet une branche parabolique que l'on précisera au voisinage de $-\infty$**(0.5point)**

5) Tracer D ,$\mathscr{C}$et $\mathscr{C}'$ dans le repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ **(0.25+0.75+0.5point)**

Exercice 4(6 points)

La courbe $\mathscr{C}$ ci dessous représente une fonction f définie sur $]0,+\infty[$; les droites d'équations $x=0$ et $y=1$ étant des asymptotes a cette courbes



1)En utilisant le graphique , déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $(\mathbf{0.25+0.25point})$

b)Le tableau de variation de f. **(0.5point)**

2)On suppose que l'expression de $f(x)$ est de la forme: $f(x)=1+\dfrac{a}{x}+b\dfrac{\ln x}{x}$ où a et b sont des nombres réels

a)Montrer que pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-a}{x^2}+b\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$ $(\mathbf{0.5point})$

b) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ en fonction de a et b **(0.25+0.25point)**

c) En déduire l'expression de $f(x)$**(0.5point)**

II)Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(e^{-x})$

1)Montrer que pour tout réel x on a : $g(x)=(1-x)e^x+1$$(\mathbf{0.5point})$

2)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=1$ et calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ $(\mathbf{0.5+0.25point})$

b)Montrer que pour tout réel x on a : $g'(x)=-xe^x$ puis dresser le tableau de variation de g**(0.5+0.5point)**

c)calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ et intérpreter graphiquement le resultat$(\mathbf{0.5+0.25point})$

d)Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que 1<α<1.5**(0.5point)**

Mercredi 06 mars 2013 *Durée :3 heures*	**Correction**	
Mr Ouled Belgacem Farouk *Lycée Maknassi **4tech 2*	***Mr Yahyaoui Ridha*** ***Mme Latifa Guith*** *Lycée Sahline **4tech 1 ,2 et3*	***Mr Chaouch Faouzi*** ***Mr Chortani*** *Lycée Bembla ** 4 Tech 1 + 3*

Exercice 1

1) $\mathrm{d(B,P)} = \dfrac{|-6+2\times 2+2\times 1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{5}{3} > 1 \Longrightarrow c)\textit{La sphère}$ ne coupe pas le plan P

2) On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et la droite D'

$$D:\begin{cases} x = 3+\alpha \\ y = 1+2\alpha \\ z = 3-\alpha \end{cases} ,\alpha \in \mathbb{R} \;\; et\; D':\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\-1\end{pmatrix}$ *Vecteur directeur de D et* $\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\1\end{pmatrix}$ *Vecteur directeur de D*

$\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{vmatrix} = 3 \neq 0\; donc\; D\; et\; D'\, ne\; sont\; pas\; parallèles$

$$\begin{cases} 3+\alpha = 3+2t \\ 1+2\alpha = 1+t \\ 3-\alpha = t \end{cases} \begin{cases} \alpha = 2t \\ 2\alpha = t \\ 3-\alpha = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = t = 0 \\ 3 = 0 \end{cases} \text{impossible} \Longrightarrow \text{c)Les droites } D \text{ et } D' \text{ sont non coplanaires}$$

3) L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

On pose $\mathrm{M}(x,y,z)$

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2} = \sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1+z^2-6z+9 = x^2+12x+36+y^2-4y+4+z^2-2z+1$$

$$\Leftrightarrow -18x+2y-4z-22 = 0 \Leftrightarrow \text{ b)}9x-y+2z+11 = 0$$

<u>Remarque</u>

l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est appelé le plan médiateur de segment [AB] ,donc on peut déterminer d'une autre façon l'équation de ce plan

On pourra remarquer que le milieu du segment [AB] est un point de ce plan, dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal

Exercice 2

1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}36\\36\\36\end{pmatrix} = 36\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors les points A, B et C déterminent un plan P

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normale de P$\Longrightarrow$ une équation cartésienne de P est de la forme $x + y + z + \mathrm{d} = 0$, $(\mathrm{d} \in \mathbb{R})$

Comme A$\in$ P on a : $6 + 0 + 0 + \mathrm{d} = 0 \Rightarrow \mathrm{d} = -6 \Rightarrow \mathrm{P}: x + y + z - 6 = 0$

c)$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-8\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD} = -8\times 36 - 2\times 36 - 2\times 36 = -432 \neq 0 \Longrightarrow$ ABCD est un tétraèdre

<u>Autrement</u> : On peut vérifier facilement que D n'apparient pas au plan P

($-2 - 2 - 2 - 6 = -12 \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{D} \notin \mathrm{P} \Longrightarrow$ ABCD est un tétraèdre)

Le volume de tétraèdre est $\vartheta = \dfrac{432}{6} = 72$

3)a)$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = \underbrace{-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{vecteur normal à P}}$ $\Longrightarrow$la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

b) $(\mathrm{OD}): \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{H le projeté orthogonal du point O sur le plan P}\\ \text{La droite (OD) est perpendiculaire au plan P}\end{array}\right\}\mathrm{H} \in (\mathrm{OD}) \Longrightarrow \{\mathrm{H}\} = (\mathrm{OD}) \cap \mathrm{P}$

$\mathrm{H}: \begin{cases} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{H}(2,2,2)$

4) Soit S la sphère de centre D et passante par A

a)Le rayon de S est $\mathfrak{r} = \mathrm{AD} = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2(-2)^2} = 6\sqrt{2}$

b)$\mathrm{BD} = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2(-2)^2} = \mathrm{CD} = \mathrm{AD} = 6\sqrt{2} = \mathfrak{r}$ alors :

A $\in$S$\cap$P, B$\in$S$\cap$P et C $\in$S$\cap$P donc la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC

c) $\left.\begin{array}{l}\text{H le projeté orthogonal du point O sur le plan P}\\ \text{La droite (OD) est perpendiculaire au plan P}\end{array}\right\}$ H le projeté orthogonal du point D sur le plan P

Donc que H est le centre de $\mathscr{C}$.

Exercice 3

I)1) g (0)=2

2) pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) \geq 2$ alors $g(x) > 0$

II)1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2 + \frac{1}{\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)} = +\infty$$

2)a) $f'(x) = 1 + e^{-2x} - 2xe^{-2x} = \dfrac{1 - 2x + e^{2x}}{e^{2x}} = \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$

b) Tableau des variations de *f*.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

3)

f continue sur$\mathbb{R}$
f strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \end{array}\right\} f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

4)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{2x}}{x}} = 0$

Donc droite D : *y* = *x* + 2 est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de +∞.

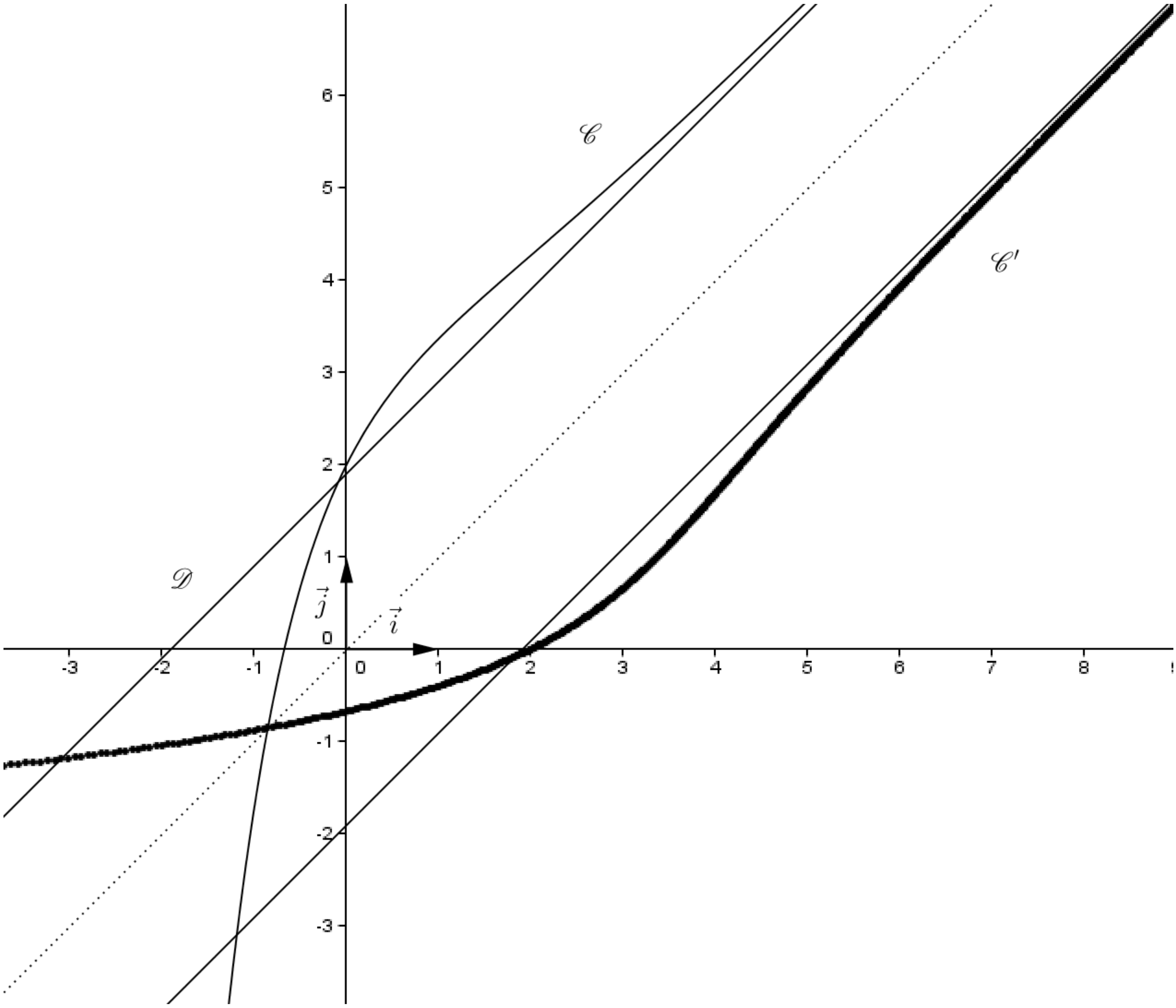
b) Position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y = xe^{-2x}$	$-$	0	$+$
position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.	$\mathscr{C}$ au dessous de D	$\mathscr{C} \cap$ D $=\{(0;2)\}$	$\mathscr{C}$ au dessus de D

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} + e^{-2x}\right) = +\infty$

$\mathscr{C}$admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

5)



Exercice 4

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

b)Le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
f			2		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	1

2)a)$f'(x) = \dfrac{-a}{x^2} + b\left(\dfrac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2}\right) = \dfrac{-a}{x^2} + b\left(\dfrac{1 - lnx}{x^2}\right)$

b) $f(1) = 1 + a \ et \ f'(1) = -a + b$

c) $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + a = 2 \\ f'(1) = -a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

II)1)$g(x) = f(e^{-x}) = 1 + \dfrac{1}{e^{-x}} + \dfrac{\ln e^{-x}}{e^{-x}} = 1 + e^x - xe^x = (1-x)e^x + 1$

2)a) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 1 + \underbrace{e^x}_{\to 0} - \underbrace{xe^x}_{\to 0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

b) $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g			2		
	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(1-x)e^x + 1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)e^x + \dfrac{1}{x} = -\infty$

La courbe de g admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

d)g continue strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$g(1) = 1 > 0$ et $g(1{,}5) \cong -1{,}24 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet dans $]\mathbf{0}, +\infty[$ une unique solution α telque que 1<α<1,5